

الهندسة

للفيف الثاني الأعداد

الفصل الدراسي الأول

مركز الخوارزمي للرياضيات

01151615142-01013533362

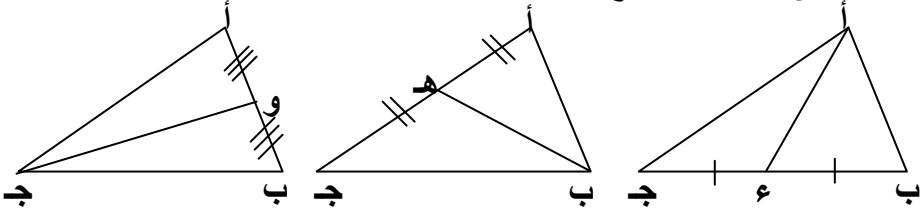
<http://algorithm.7olm.com>



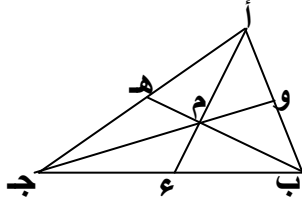
متوسطات المثلث

تعريف

متوسط المثلث هو القطعة المستقيمة الواصلة بين أى رأس من رؤوس المثلث الى منتصف الضلع المقابل لهذه الرأس



إذا كان ع منتصف ب ج || إذا كان ه منتصف أ ج || إذا كان و منتصف أ ب
فان أ ع يسمى متوسط || فان ب ه يسمى متوسط || فان ج و (متوسط)



نظرية (١ - ١)

متوسطات المثلث تتقاطع جميعا فى

نقطة واحدة

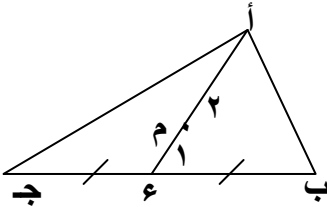
$$\{ م \} = أ ع \cap ب ه \cap ج و$$

نظرية (٢ - ١)

نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كلا منها بنسبة ١ : ٢ من جهة القاعدة

أى أن

$$أ م : م ع = ٢ : ١$$



$$أ م = ٢ م ع = ٢ \times \frac{٢}{٣} أ ع$$

$$م ع = \frac{١}{٣} أ م = \frac{١}{٣} \times \frac{٢}{٣} أ ع$$

لاحظ إذا كان أ ع متوسط طوله ٦ سم ، م نقطة تلاقى متوسطات المثلث فإن

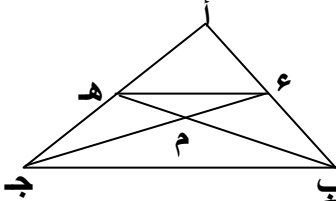
$$أ م = ٤ سم ، م ع = ٢ سم$$

لاحظ أن:

نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كلا منها بنسبة ٢ : ١ من جهة الرأس

حقيقة :-

النقطة التي تقسم متوسط المثلث بنسبة ١ : ٢ من جهة القاعدة هي نقطة تقاطع متوسطات المثلث



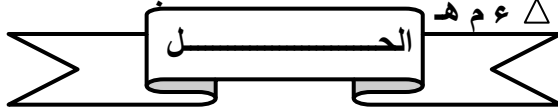
في الشكل المقابل

ء، ه منتصفا أ ب ، أ ج

ب م = ٦ سم، ب ج = ١٠ سم

ء ج = ١٢ سم أوجد محيط

مثال

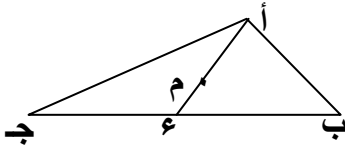


$$\text{ء منتصف أ ب} \therefore \text{جء متوسط} \therefore \text{م} = \frac{1}{3} \text{ جء} = \frac{1}{3} \times 12 = 4 \text{ سم}$$

$$\text{ه منتصف أ ج} \therefore \text{ب ه متوسط} \therefore \text{م} = \frac{1}{3} \text{ ب ه} = \frac{1}{3} \times 6 = 2 \text{ سم}$$

$$\text{ء منتصف أ ب ، ه منتصف أ ج} \therefore \text{ء ه} = \frac{1}{4} \text{ ب ج} = \frac{1}{4} \times 10 = 2.5 \text{ سم}$$

$$\text{محيط } \triangle \text{ء م ه} = \text{ء م} + \text{م ه} + \text{ه ء} = 4 + 2 + 2.5 = 8.5 \text{ سم}$$



من الشكل المقابل

إذا كانت م نقطة تقاطع متوسطات المثلث فأكمل

مثال

$$(٤) \text{ إذا كان أ ء} = ٩ \text{ سم فإن أ م} = \dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots = \text{م ء}$$

$$(١) \frac{\text{أ م}}{\text{م ء}} = \dots\dots\dots$$

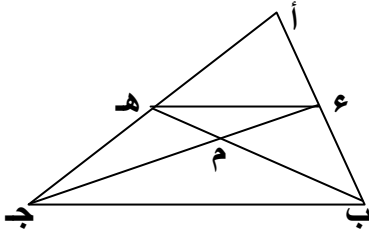
$$(٢) \frac{\text{أ م}}{\text{ء م}} = \dots\dots\dots$$

$$(٣) \frac{\text{م ء}}{\text{ء م}} = \dots\dots\dots$$

مثال

في الشكل المقابل

إذا كان $ع$ ، $هـ$ منتصفا $أ ب$ ،
أ ج ،
 $أ ب \cap أ ج = \{ م \}$ فأكمل



(١) إذا كان $ع ج = ١٢$ سم فإن $ع م =$ سم ، $م ج =$ سم

(٢) إذا كان $ع م = ٥$ فإن $م ج =$ سم ، $ع ج =$ سم

(٣) إذا كان $م ج = ١٢$ سم فإن $ع م =$ سم ، $ع ج =$ سم

(٤) إذا كان $ب م = ٤$ سم فإن $م هـ =$ سم ، $ب هـ =$ سم

(٥) إذا كان $ع هـ = ١٠$ سم فإن $ب ج =$ سم

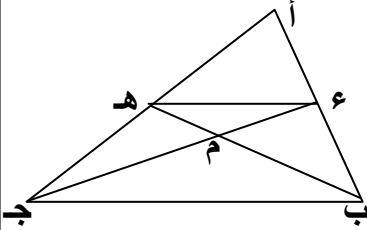
(٦) إذا كان $ب ج = ٨$ سم فإن $ع هـ =$ سم

(٧) $ع هـ : ب ج =$:

مثال

في الشكل المقابل

إذا كان $ع$ ، $هـ$ منتصفا $أ ب$ ، أ ج
محيط $\triangle م ب ج = ٢٠$ سم
أوجد محيط $\triangle م ع هـ$



الحل

$ع$ منتصف $أ ب$ $\therefore ج ع$ متوسط $\therefore م ع = \frac{١}{٢} م ج$

$هـ$ منتصف $أ ج$ $\therefore ب هـ$ متوسط $\therefore م هـ = \frac{١}{٢} ب م$

$ع$ منتصف $أ ب$ ، $هـ$ منتصف $أ ج$ $\therefore ع هـ = \frac{١}{٢} ب ج$

محيط $ع م هـ = م ع + م هـ + ع هـ = \frac{١}{٢} م ج + \frac{١}{٢} ب م + \frac{١}{٢} ب ج$

$= \frac{١}{٢} (م ج + ب م + ب ج) = \frac{١}{٢} \times ٢٠ = ١٠$ سم

مثال

في الشكل المقابل

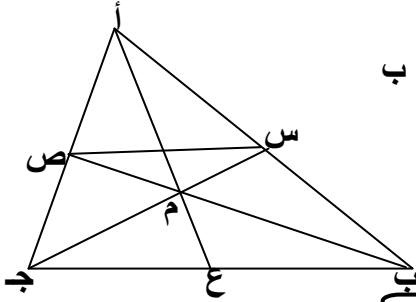
أ ب ج مثلث فيه س منتصف أ ب

ص 3 أ ج ، س ص // ب ج

ج س ∩ ب ص = {م} فإذا كان

أ م ∩ ب ج = {ع} أثبت أن

$$ب ع = \frac{1}{3} ب ج$$



الحل

س منتصف أ ب ، س ص // ب ج ∴ ص منتصف أ ج

س منتصف أ ب ∴ ج س متوسط ، ص منتصف أ ج ∴ ب ص متوسط

أ ع ∩ ب ص ∩ ج س = {م}

∴ أ ع متوسط ∴ ب ع = $\frac{1}{3}$ ب ج

مثال

في الشكل المقابل

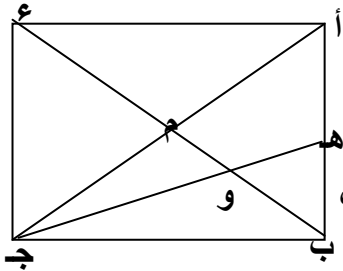
أ ب ج د مستطيل تقاطع قطراه

في م ، ه منتصف أ ب

ج د ∩ ه ب = {و}

(١) أثبت أن ب و نقطة تقاطع متوسطات المثلث

(٢) إذا ب و = ٤ سم أوجد طول أ م



الحل

ه منتصف أ ب ∴ ج د متوسط في أ ب ج

م منتصف أ ج (القطران ينصف كلا منهما الآخر) ∴ ب م متوسط

ج د ∩ ه ب = {و} ∴ و نقطة تقاطع متوسطات المثلث أ ب ج

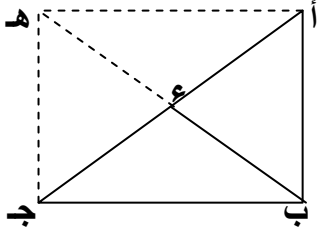
ب و = ٤ سم ∴ و م = ٢ سم ∴ ب م = ٦ سم

في المستطيل القطران متساويان وينصف كلا منهما الآخر

أ م = ب م = ٦ سم

نظرية (١ - ٣)

طول متوسط المثلث القائم الزاوية الخارج من رأس القائمة يساوى نصف طول وتر هذا المثلث



المعطيات أ ب ج مثلث فيه ق (أ ب ج) = ٩٠

ب ع متوسط فى المثلث أ ب ج

المطلوب

إثبات أن ب ع = $\frac{1}{2}$ أ ج

العمل

نرسم ب ع ونأخذ هـ على ب ع

بحيث ب ع = ع هـ

البرهان

الشكل أ ب ج هـ فيه أ ج ، ب هـ

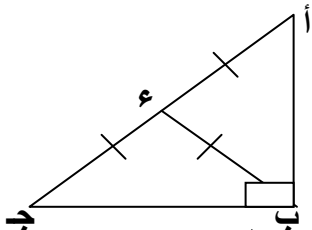
ينصف كلا منهما الآخر

∴ الشكل أ ب ج هـ متوازى أضلاع

ق (أ ب ج) = ٩٠ ∴ الشكل أ ب ج هـ مستطيل

∴ ب هـ = أ ج

ب ع = $\frac{1}{2}$ ب هـ ∴ ب ع = $\frac{1}{2}$ أ ج



فمثلا فى الشكل المقابل

إذا كان ع منتصف أ ج

، ب ج = ١٠ سم فإن ب ع = ٥ سم

والعكس صحيح

إذا كان ع منتصف أ ج وكان ب ع = ٣ سم فإن أ ج = ٦ سم

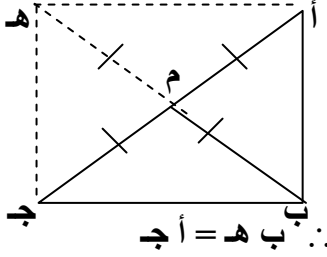
لاحظ أن ب ع = أ ع = ع ج وبالتالي فإن

(١) المثلث أ ب ع يكون مثلث متساوى الساقين

(٢) المثلث ب ع ج يكون مثلث متساوى الساقين

عكس نظرية (٣-١)

إذا كان طول متوسط المثلث المرسوم من أحد رؤوسه يساوى نصف طول الضلع المقابل فإن زاوية هذا الرأس تكون قائمة



المعطيات أ ب ج مثلث ، ب ع متوسط

$$ع أ = ع ب = ع ج$$

المطلوب إثبات أن ق (أ ب ج) = ٩٠°

العمل نرسم ب ع ونأخذ ه ب ع

بحيث ب ع = ع ه

$$ب ع = ع ب = ه ب = أ ج$$

البرهان

∴ الشكل أ ب ج ه فيه أ ج ، ب ه متساويان فى الطول

وينصف كلا منهما الآخر

∴ الشكل أ ب ج ه مستطيل

∴ ق (أ ب ج) = ٩٠° وهو المطلوب إثباته

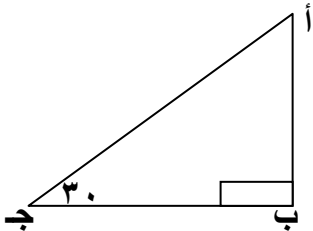
فى المثلث القائم الزاوية طول الضلع المقابل للزاوية ٣٠ يساوى نصف طول الوتر

نتيجة

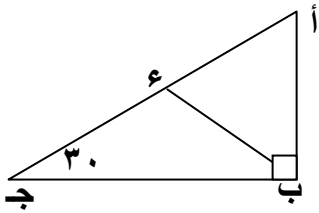
$$أ ب = أ ج$$

إذا كان أ ج = ١٠ سم فإن أ ب = ٥ سم

إذا كان أ ب = ٦ سم ، فإن أ ج = ١٢ سم



مثال



في الشكل المقابل
أ ج = ١٠ سم ، ق (ج) = ٣٠ °
ق (أ ب ج) = ٩٠ ° ، ع منتصف أ ج
أوجد محيط $\triangle$ أ ب ع

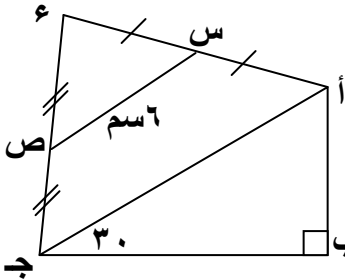
الحل

ع منتصف أ ج ، ق (أ ب ج) = ٩٠ ° $\therefore$ ب ع = $\frac{1}{2}$ أ ج = ٥ سم

ق (ج) = ٣٠ ° ، ق (أ ب ج) = ٩٠ ° $\therefore$ أ ب = $\frac{1}{2}$ أ ج = ٥ سم

محيط $\triangle$ أ ب ع = أ ب + ب ع + أ ع = ٥ + ٥ + ٥ = ١٥ سم

مثال



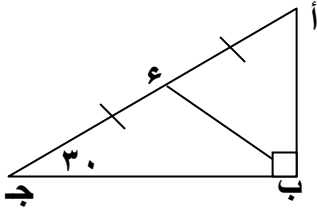
في الشكل المقابل
أوجد طول أ ب

الحل

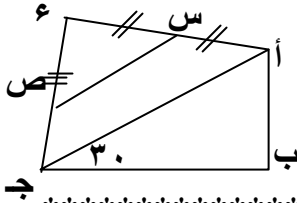
س منتصف أ ع ، ص منتصف ع ج
س ص = $\frac{1}{2}$ أ ج $\therefore$ أ ج = ١٢ سم

في أ ب ج ق (أ ب ج) = ٩٠ ° ، ق (أ ب ج) = ٣٠ °
 $\therefore$ أ ب = $\frac{1}{2}$ أ ج = ٦ سم

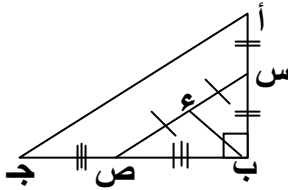
تمارين



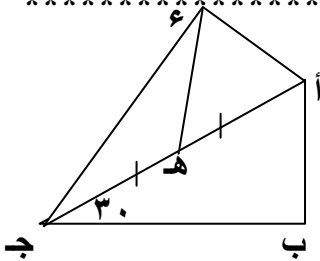
(١) في الشكل المقابل
إثبت أن $\triangle ABE \cong \triangle BCE$
متساوي الاضلاع



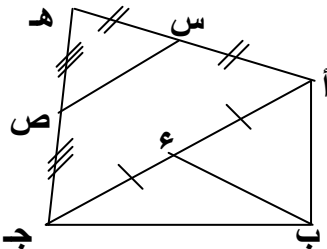
(٢) في الشكل المقابل
إثبت أن
 $AB = BC$



(٣) في الشكل المقابل
إثبت أن
 $BE = \frac{1}{4} AC$



(٤) في الشكل المقابل
ق) (أ ب ج) = ق) (أ ع ج) = 90°
ق) (أ ج ب) = 30° ، ه منتصف أ ج
إثبت أن $AB = BE$

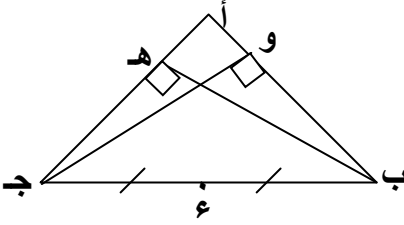


(٥) في الشكل المقابل
إثبت أن
 $AB = BC$

(٦) فى الشكل المقابل

إثبت أن

$\triangle$ ع و ه متساوى الساقين



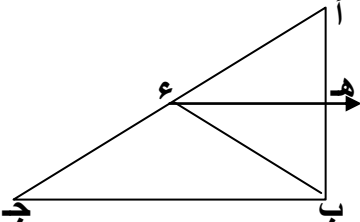
(٧) أ ب ج مثلث فيه ق (أ ب ج) = 90°

، ع منتصف أ ج ، ع ه // ب ج

ويقطع أ ب فى ه إثبت أن

(١) محيط $\triangle$ ه ب ع = محيط $\triangle$ أ ب ج

(٢) $\triangle$ أ ع ب متساوى الساقين



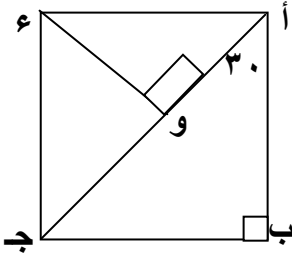
(٨) فى الشكل المقابل

أ ب ج ع مربع ، ه ج ب ج

ق (ب أ ه) = 30° ، ع و $\perp$ أ ه

فإذا كان أ و = ٤ سم أحسب

مساحة المربع



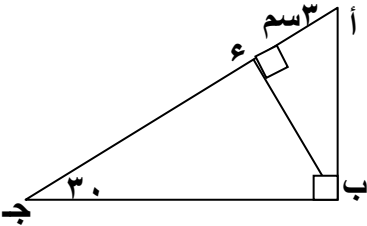
(٩) فى الشكل المقابل

أ ب ج مثلث فيه ق (أ ب ج) = 90°

ق (ج) = 30° ، ب ع $\perp$ أ ج

فإذا كان أ ع = ٣ سم أحسب طول

أ ب ، ع ج



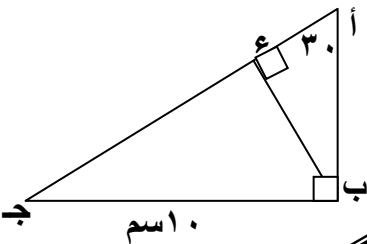
(١٠) فى الشكل المقابل

أ ب ج مثلث فيه ق (أ ب ج) = 90°

ق (أ) = 30° ، ب ع $\perp$ أ ج

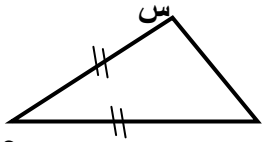
، ب ج = ١٠ سم أوجد

طول أ ع

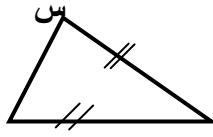


المثلث المتساوي الساقين

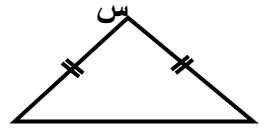
زاويتا القاعدة في المثلث المتساوي الساقين متطابقتان



ص ع
إذا كان س ع = ص ع
فان ق (س) = ق (ص)

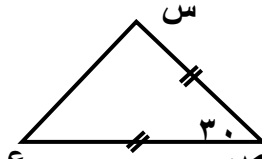


ص ع
إذا كان س س = ع ع
فان ق (س) = ق (ع)

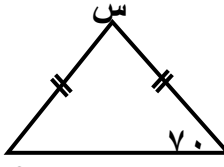


ص ع
إذا كان س ص = س ع
فان ق (ص) = ق (ع)

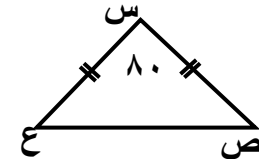
س في كل شكل من الاشكال الاتية أكمل حسب المطلوب



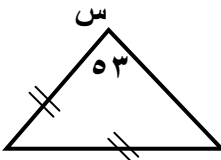
ص ع
ق (س) =
ق (ع) =



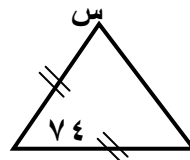
ص ع
ق (ع) =
ق (س) =



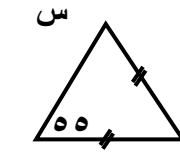
ص ع
ق (ص) =
ق (ع) =



ص ع
ق (ص) =
ق (ع) =



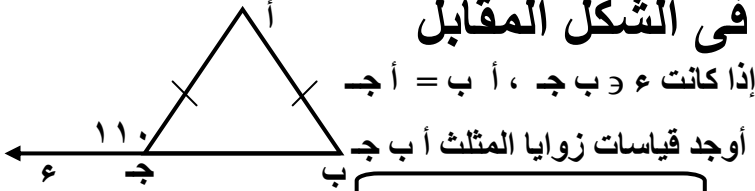
ص ع
ق (ص) =
ق (س) =



ص ع
ق (ص) =
ق (س) =

مثال

في الشكل المقابل



الحل

$$ق(أ\hat{ج}ب) + ق(أ\hat{ج}ع) = 180$$

[زاويتان متجاورتان حادثتان من تقاطع شعاع ومستقيم]

$$\therefore ق(أ\hat{ج}ب) = 180 - 110 = 70$$

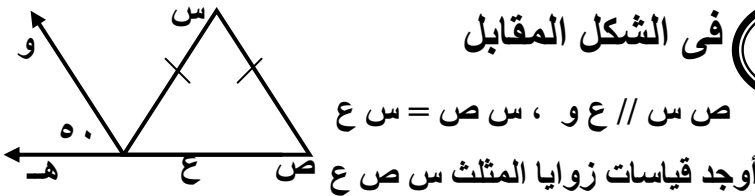
$$أب = أ\hat{ج}ب \therefore ق(ب) = ق(أ\hat{ج}ب) = 70$$

مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = 180

$$\therefore ق(أ) = 180 - [70 + 70] = 180 - 140 = 40^\circ$$

مثال

في الشكل المقابل



الحل

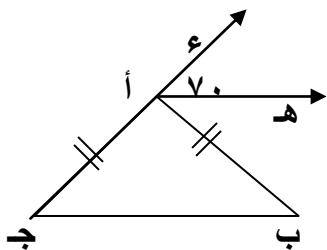
ص س // ع و

$$\therefore ق(ص) = ق(و\hat{ع}ه) = 50^\circ \text{ [متناظرتان]}$$

$$س س = س ع \therefore ق(ص) = ق(س\hat{ع}ص) = 50$$

مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = 180

$$\overset{\circ}{\text{ق}} (س) = \overset{\circ}{\text{ق}} ١٨٠ - ١٨٠ = [٥٠ + \overset{\circ}{\text{ق}} ٥٠] - \overset{\circ}{\text{ق}} ١٨٠ = \overset{\circ}{\text{ق}} ٨٠$$



في الشكل المقابل

مثال

أب = أج ، أه // جب
أوجد قياسات زوايا المثلث أب جـ

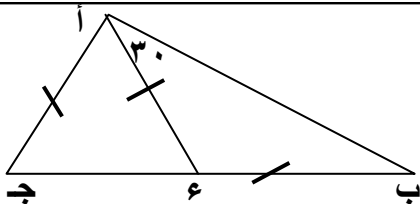
الحـ

$$\text{أه} // \text{جب} \quad \therefore \text{ق} (\text{أه} \hat{\text{أ}}) = \text{ق} (\hat{\text{ج}}) = ٧٠$$

$$\text{أب} = \text{أج} \quad \therefore \text{ق} (\hat{\text{ب}}) = \text{ق} (\hat{\text{ج}}) = ٧٠$$

مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠

$$\therefore \text{ق} (\hat{\text{ب}} \hat{\text{أ}} \hat{\text{ج}}) = \overset{\circ}{\text{ق}} ١٨٠ - [٧٠ + \overset{\circ}{\text{ق}} ٧٠] = ٤٠$$



في الشكل المقابل

مثال

$$\text{ب} = \text{أ} = \text{ع} = \text{أج} ،$$

$$\text{ق} (\text{ب} \hat{\text{أ}} \hat{\text{ع}}) = ٣٠$$

أوجد ق (ع أ جـ)

الحـ

في $\triangle \text{أ ب ع}$

$$\text{ب} = \text{أ} = \text{ع} \quad \therefore \text{ق} (\hat{\text{ب}}) = \text{ق} (\text{ب} \hat{\text{أ}} \hat{\text{ع}}) = ٣٠$$

مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠

$$\therefore \text{ق} (\hat{\text{أ}} \hat{\text{ب}} \hat{\text{ع}}) = \overset{\circ}{\text{ق}} ١٨٠ - [٣٠ + ٣٠] = ١٢٠$$

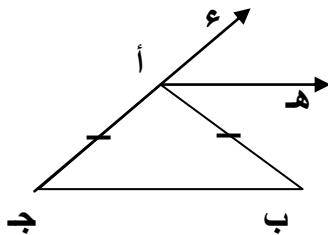
$$\text{ق} (\hat{\text{أ}} \hat{\text{ب}} \hat{\text{ع}}) + \text{ق} (\hat{\text{أ}} \hat{\text{ع}} \hat{\text{ج}}) = ١٨٠$$

[متجاورتان حادتان من تقاطع مستقيم وشعاع بدايته تقع على المستقيم]

$$\therefore \text{ق} (\hat{\text{أ}} \hat{\text{ع}} \hat{\text{ج}}) = ١٨٠ - ١٢٠ = ٨٠$$

$$\text{في } \triangle \text{أ ع ج} \quad \text{أ} = \text{ع} \quad \therefore \text{ق} (\hat{\text{أ}} \hat{\text{ع}} \hat{\text{ج}}) = \text{ق} (\hat{\text{أ}} \hat{\text{ج}} \hat{\text{ع}}) = \overset{\circ}{\text{ق}} ٨٠$$

مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = 180°
 $\therefore \text{ق}(\angle \text{أ ج}) = 180^\circ - [80^\circ + 80^\circ] = 180^\circ - 160^\circ = 20^\circ$



في الشكل المقابل
 $\text{أ ب} = \text{أ ج}$ ، $\text{أ هـ} \parallel \text{ب ج}$
 إثبت أن أ هـ ينصف أ ب

مثال

الحل

$\text{أ ب} = \text{أ ج}$ $\therefore \text{ق}(\angle \text{ب}) = \text{ق}(\angle \text{ج})$ (١)

$\text{أ هـ} \parallel \text{ب ج}$

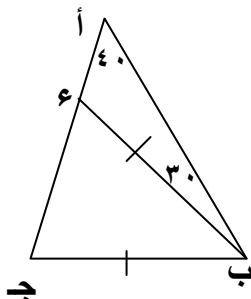
$\therefore \text{ق}(\angle \text{هـ أ ج}) = \text{ق}(\angle \text{ج})$ [متناظرتان] (٢)

$\therefore \text{ق}(\angle \text{هـ أ ب}) = \text{ق}(\angle \text{ب})$ [متبادلتان] (٣)

من ١، ٢، ٣ ينتج أن $\text{ق}(\angle \text{هـ أ ج}) = \text{ق}(\angle \text{هـ أ ب})$
 $\therefore \text{أ هـ}$ ينصف أ ب

نتيجة (١)

زوايا المثلث المتساوي الاضلاع متطابقة وقياس كلا منها = 60°



في الشكل المقابل $\text{ب ج} = \text{ب ع}$
 أوجد $\text{ق}(\angle \text{ب ج ع})$ ، $\text{ق}(\angle \text{ب ج أ})$

مثال

الحل

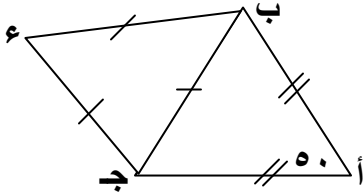
$\text{ق}(\angle \text{ب ج ع}) = \text{ق}(\angle \text{أ}) + \text{ق}(\angle \text{أ ب ع})$

لأنها خارجة عن $\triangle \text{أ ب ع}$

$$\therefore \text{ق (ب ء ج)} = 30^\circ + 40^\circ = 70^\circ$$

$$\text{ب ء ج} = 70^\circ \therefore \text{ق (ب ء ج)} = \text{ق (ج ء ب)} = 70^\circ$$

$$\therefore \text{ق (ء ب ج)} = 180^\circ - [70^\circ + 70^\circ] = 40^\circ$$



فى الشكل المقابل

مثال

ق (أ) = 50° ، أ ب = أ ج
ء ب ج متساوى الاضلاع
أوجد ق (أ ب ء)

الحل

فى Δ أ ب ج

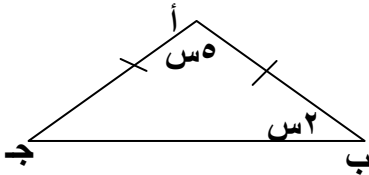
$$\text{أ ب} = \text{أ ج} \therefore \text{ق (أ ب ج)} = \text{ق (أ ج ب)} = 50^\circ - 180^\circ = 65^\circ$$

فى Δ ب ج ء

$$\text{ب ء ج} = \text{ء ج ب} = 65^\circ$$

$$\therefore \text{ق (ج ب ء)} = \text{ق (ب ء ج)} = \text{ق (ء ج ب)} = 60^\circ$$

$$\therefore \text{ق (أ ب ء)} = 60^\circ + 65^\circ = 125^\circ$$



فى الشكل المقابل

مثال

$$\text{أ ب} = \text{أ ج} ، \text{ق (أ)} = 50^\circ$$

$$\text{ق (ب)} = 20^\circ$$

أحسب قياسات زوايا Δ أ ب ج

الحل

$$\text{أ ب} = \text{أ ج}$$

$$\text{ق (ب)} = \text{ق (ج)} = 20^\circ$$

مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = 180°

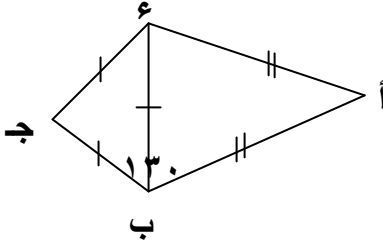
$$\text{ق (أ)} + \text{ق (ب)} + \text{ق (ج)} = 180^\circ$$

$$50^\circ + 20^\circ + 20^\circ = 180^\circ$$

$$90^\circ = 180^\circ - 20^\circ$$

ق (أ) = ٥س = ٢٠ × ٥ = ١٠٠
 ق (ب) = ٢س = ٢٠ × ٢ = ٤٠
 ق (ج) = ٢س = ٢٠ × ٢ = ٤٠

تمارين



(١) في الشكل المقابل

أع = أب ، ب ع ج

متساوى الاضلاع ،

ق (أ ب ج) = ١٣٠ أكمل

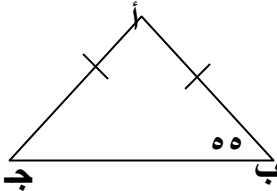
(١) ق (ع ب ج) =

(٢) ق (أ ب ع) =

(٤) ق (ب ع ج) =

(٥) ق (ب أ ع) =

(٣) ق (أ ع ب) =

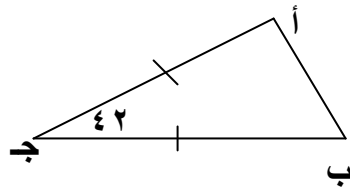


(٢) في الشكل المقابل

أب = أج

ق (أ ب ج) = ٥٥

أوجد ق (ب أ ج)

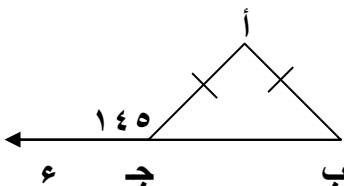


(٣) في الشكل المقابل

أج = ب ج

ق (أ ج ب) = ٤٢

أوجد ق (أ ب ج)



(٤) في الشكل المقابل

أب = أج

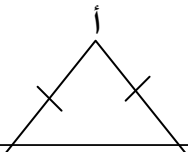
ق (أ ج ع) = ١٤٥

أوجد ق (ب أ ج)

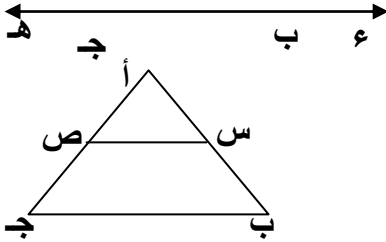
(٥) في الشكل المقابل

أب = أج

إثبت أن



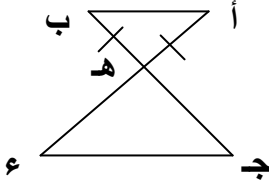
ق (أ ب ع) = ق (أ ج هـ)



(٦) فى الشكل المقابل

أ ب = أ ج ، س ص // ب ج
إثبت أن

ق (أ س ص) = ق (أ ص س)



(٧) فى الشكل المقابل

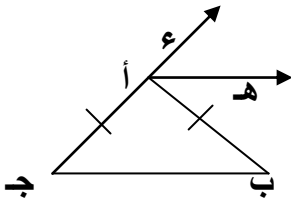
أ هـ = هـ ب

أ ب // ج ع

إثبت أن ق (ج) = ق (ع)

(٨) أ ب ج ع شكل رباعي فيه أ ع = ب ع = ب ج ، ق (أ ب ع) = ٦٤ °

ق (ب ع ج) = ٦٢ ° أوجد ق (أ ب ج)



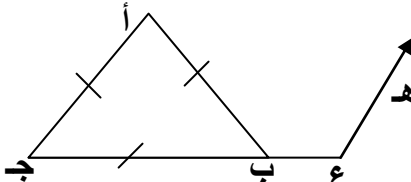
(٩) فى الشكل المقابل

أ ب = أ ج

أ هـ // ب ج

إثبت أن

أ هـ ينصف أ هـ

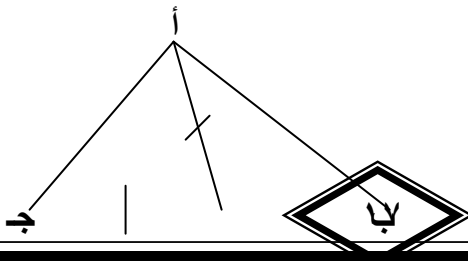


(١٠) فى الشكل المقابل

أ ب ج مثلث متساوى الاضلاع

ع هـ // أ ج

أوجد ق (هـ ع ج)

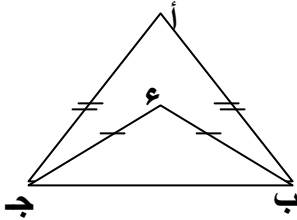
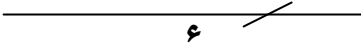


(١١) فى الشكل المقابل

ب ع = أ ع = ج ع

ق (أ ع ج) = ٨٠ °

أوجد ق (ب أ ج)



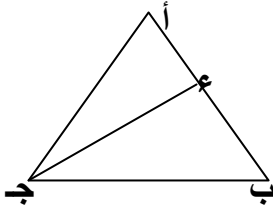
(١٢) فى الشكل المقابل

أب = أ ج ، ب ع = ع ج

ق (أ) = ٦٦°

ق (ب ع ج) = ١٢٤°

أوجد ق (أ ب ع)



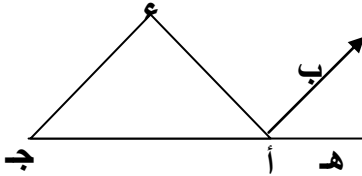
(١٣) فى الشكل المقابل

أب = ب ج

ق (أ ب ج) = ٥٢°

ج ع ينصف (ب ج أ)

أوجد ق (أ ع ج)

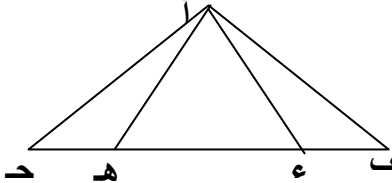


(١٤) فى الشكل المقابل

أ ج = أ ع

أ ب ينصف ع أ هـ

إثبت أن أ ب // ج ع

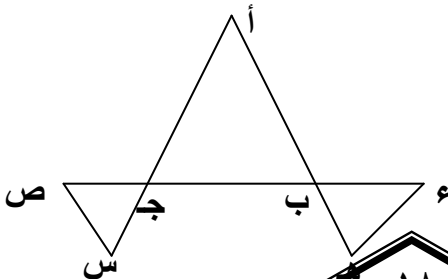


(١٥) فى الشكل المقابل

أب = أ ج ، ب ع = هـ ج

إثبت أن

أ ع = أ هـ



(١٦) فى الشكل المقابل

أب = أ ج

ب ج = ج ص

ب هـ = ج س

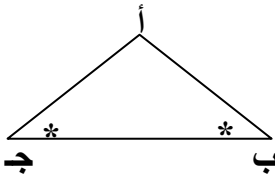
إثبت أن

ع هـ = س ص

عكس نظرية المثلث المتساوي الساقين

إذا تطابقت زاويتان في مثلث فان الضلعين المقابلين لهاتين

الزوايا هما متساويان في كونه المثلث متساوي الساقين



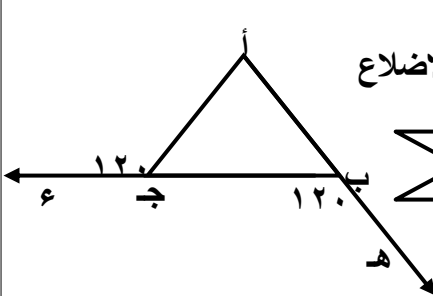
فمثلا في الشكل المقابل

إذا كان $\angle ق = \angle ب$ ($\hat{ج}$)

فان $أب = أج$

نتيجة (١)

إذا تطابقت زوايا مثلث فإنه يكون متساوي الاضلاع



في الشكل المقابل

إثبت أن $\Delta أ ب ج$ متساوي الاضلاع

الحل

$$\angle ق (أ ب ج) + \angle ق (ه ب ج) = 180^\circ$$

$$\angle ق (أ ب ج) = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

$$\angle ق (أ ب ج) + \angle ق (أ ج ع) = 180^\circ$$

$$\angle ق (أ ب ج) = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = 180°

$$\angle ق (أ) = 180^\circ - 120^\circ - 60^\circ = 60^\circ$$

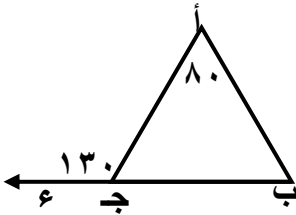
$$\angle ق (أ) = \angle ق (أ ب ج) = \angle ق (أ ج ب)$$

$\Delta أ ب ج$ متساوي الاضلاع

مثال

في الشكل المقابل

إثبت أن المثلث أ ب ج
متساوي الساقين



الحل

$$\text{ق (أ ج ب)} + \text{ق (أ ج ع)} = 180^\circ$$

[متجاورتان حادتان من تقاطع شعاع ومستقيم]

$$\therefore \text{ق (أ ج ب)} = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$$

مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلية = 180°

$$\therefore \text{ق (أ)} = 180^\circ - [50^\circ + 80^\circ] = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$$

$$\text{ق (أ)} = \text{ق (أ ج ب)} = 50^\circ \therefore \text{أ ب} = \text{ب ج}$$

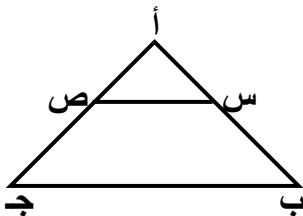
[المثلث متساوي الساقين]

مثال

في الشكل المقابل

أ ب = أ ج ، س ص // ب ج
أثبت أن

Δ أ س ص متساوي الساقين



الحل

في Δ أ ب ج أ ب = أ ج

$$\therefore \text{ق (ب)} = \text{ق (ج)} \quad (1)$$

س ص // ب ج

$$\therefore \text{ق (أ س ص)} = \text{ق (ب)} \quad [\text{بالتناظر}]$$

$$\therefore \text{ق (أ ص س)} = \text{ق (ج)} \quad [\text{بالتناظر}]$$

من ١، ٢، ٣ ينتج أن
ق (أ س ص) = ق (أ ص س)

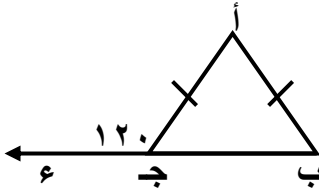
أ س ص متساوي الساقين

في الشكل المقابل

إثبت أن Δ أ ب ج

متساوي الاضلاع

مثال



الحل

$$ق (أ ج ع) + ق (أ ج ب) = 180$$

$$\therefore ق (أ ج ب) = 180 - 120 = 60$$

في Δ أ ب ج $\therefore$ أ ب = أ ج

$$\therefore ق (أ ب ج) = ق (أ ج ب) = 60$$

مجموع زوايا المثلث = 180

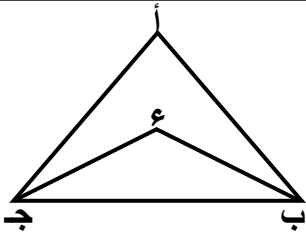
$$\therefore ق (أ) = 180 - [60 + 60] = 60$$

$$ق (أ) = ق (أ ب ج) = ق (أ ج ب)$$

$\therefore \Delta$ أ ب ج متساوي الاضلاع

في الشكل المقابل

مثال



أ ب = أ ج

ب د ينصف أ ب ج

ج د ينصف أ ج ع

إثبت أن Δ أ ب ج متساوي الساقين

الحل

$$أ ب = أ ج \therefore ق (ب) = ق (ج)$$

$$ب د ينصف أ ب ج \therefore ق (ب د ج) = \frac{1}{2} ق (ب)$$

$$ج د ينصف أ ج ع \therefore ق (ج د ع) = \frac{1}{2} ق (ج)$$

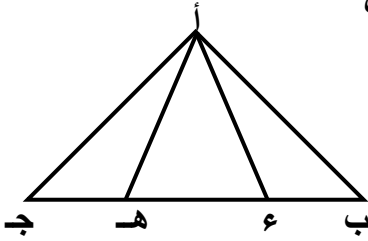
من ١ ، ٢ ، ٣ ينتج أن
 ق (ع ب ج) = ق (ع ج ب)
 ∴ Δ ع ب ج متساوي الساقين

في الشكل المقابل

مثال

أ ب = أ ج ، ب ع = هـ ج

إثبت أن Δ أ ع هـ متساوي الساقين



الحل

Δ أ ب ع ، أ هـ ج

أ ب = أ ج

ب ع = هـ ج

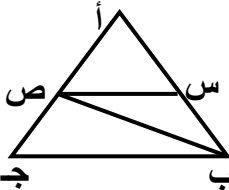
فيهما

ق (ب ج) = ق (ج ب) [لان أ ب = أ ج]

∴ Δ أ ب ع ≡ Δ أ ج هـ

ومن التطابق ينتج أن أ ع = أ هـ

∴ Δ أ ع هـ متساوي الساقين



في الشكل المقابل

مثال

س ص // ب ج

ب ص ينصف (أ ب ج)

إثبت أن Δ س ب ص متساوي الساقين

الحل

س ص // ب ج ∴ ق (س ص ب) = ق (ص ب ج) (١)

ب ص ينصف أ ب ج ∴ ق (س ب ص) = ق (ص ب ج) (٢)

من ١ ، ٢ ينتج أن

ق (س ص ب) = ق (س ب ص)

∴ ∆ س ب ص متساوى الساقين

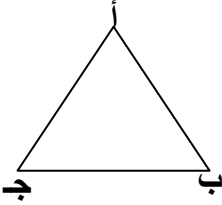
تمارين

(١) فى الشكل المقابل

$$\text{ق}(\text{أ}) = ٤٠^\circ ، \text{ق}(\text{ب}) = ٧٠^\circ$$

إثبت أن

∆ أ ب ج متساوى الساقين

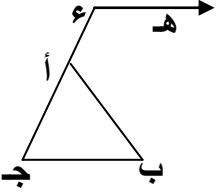


(٢) فى الشكل المقابل

هـ هـ // ب ج

$$\text{ق}(\text{ب}) = ٦٠ ، \text{ق}(\text{هـ أ هـ}) = ١٢٠$$

أثبت أن ∆ أ ب ج متساوى الاضلاع



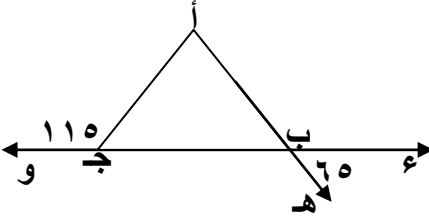
(٣) فى الشكل المقابل

$$\text{ق}(\text{أ ج و}) = ١١٥$$

$$\text{ق}(\text{هـ ب هـ}) = ٦٥$$

إثبت أن

∆ أ ب ج متساوى الساقين

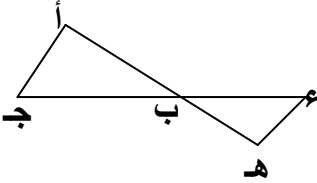


(٤) فى الشكل المقابل

$$\text{أ ب} = \text{أ ج}$$

$$\text{هـ هـ} // \text{أ ج}$$

إثبت أن هـ هـ = ب هـ



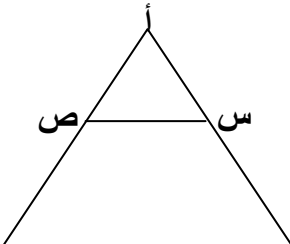
(٥) فى الشكل المقابل

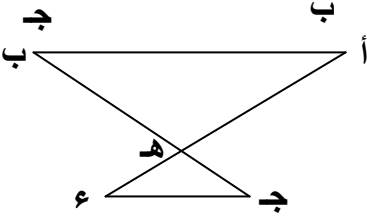
$$\text{أ ب} = \text{أ ج} ، \text{س س} // \text{ب ج}$$

إثبت أن

(١) أ س ص متساوى الساقين

(٢) س ب = ص ج



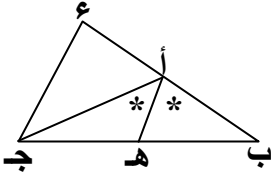


(٦) فى الشكل المقابل

$$هـ ج = هـ ع$$

$$أ ب // ج ع$$

إثبت أن $أ هـ = ب هـ$

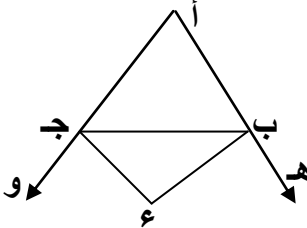


(٧) فى الشكل المقابل

$$أ هـ // ع ج$$

أ هـ ينصف ب أ ج

إثبت أن $\triangle أ ع ج$ متساوى الساقين

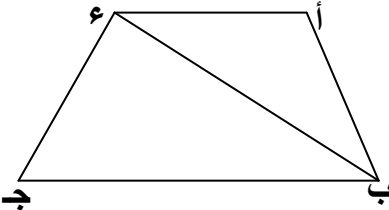


(٨) فى الشكل المقابل

$$أ ب = أ ج ، ب ع ينصف هـ ب ج$$

$$أ ج ع ينصف ب ج و$$

إثبت أن $ب ع = ع ج$



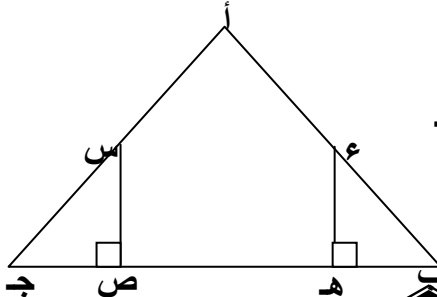
(٩) فى الشكل المقابل

$$ب ع = ب ج ، أ ع // ب ج$$

$$\overset{\circ}{\text{ق}} (ب ع ج) = ٧٠^\circ$$

$$\overset{\circ}{\text{ق}} (ب أ ع) = ١٠٠^\circ$$

إثبت أن $أ ب = أ ع$

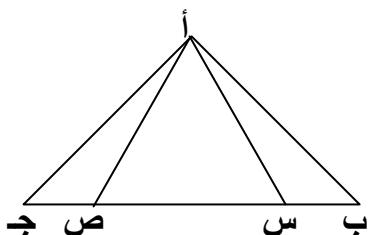


(١٠) فى الشكل المقابل

$$ع ب = س ج ، ب هـ = ص ج$$

$$ع هـ // ب ج ، س ص // ب ج$$

إثبت أن $أ ب = أ ج$



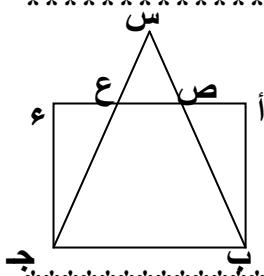
(١١) فى الشكل المقابل

ب س = ج ص

ق (أ س ص) = ق (أ ص س)

إثبت أن

△ أ ب ج متساوى الساقين



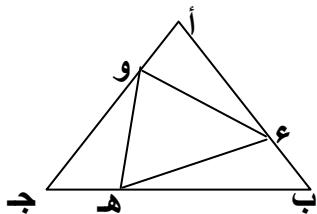
(١٢) فى الشكل المقابل

أ ب ج د مربع ، أ ص = ع ع

إثبت أن

(١) ب ص = ج د

(٢) △ س ص ع متساوى الساقين



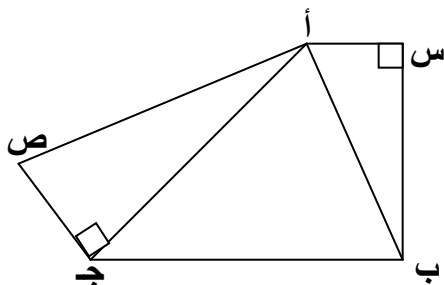
(١٣) فى الشكل المقابل

أ ب ج متساوى الاضلاع

أ ع = ب هـ = ج و

إثبت أن

ع هـ و متساوى الاضلاع



(١٤) فى الشكل المقابل

أ س = ج د ، س ب = أ ص

ق (أ س ب) = ٩٠°

ق (أ ص ج) = ٩٠°

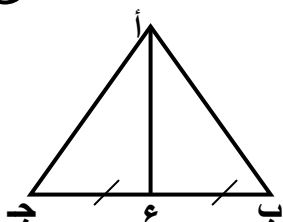
إثبت أن

ق (أ ب ج) = ق (أ ج ب)

نتائج في المثلث المتساوي الساقين

نتيجة (١)

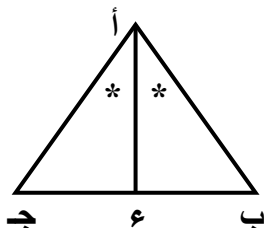
متوسط المثلث المتساوي الساقين المرسوم من زاوية الرأس ينصف زاوية الرأس ويكون عموديا على القاعدة



في الشكل المقابل
إذا كان $\hat{A}$ متوسط $\hat{E}$ منتصف $\hat{B}$ ج
فان (١) $\hat{A}$ ينصف $\hat{B}$ ج
(٢) $\hat{A} \perp \hat{B}$ ج

نتيجة (٢)

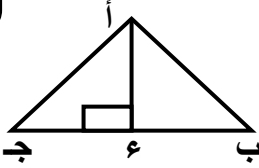
منصف زاوية الرأس في المثلث المتساوي الساقين ينصف القاعدة ويكون عموديا عليها



في الشكل المقابل
إذا كان $\hat{A}$ ينصف $\hat{B}$ ج
فان (١) $\hat{A}$ متوسط $\hat{E}$ منتصف $\hat{B}$ ج
(٢) $\hat{A} \perp \hat{B}$ ج

نتيجة (٣)

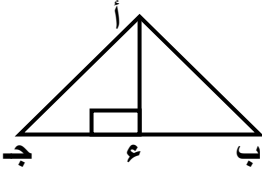
المستقيم المرسوم من رأس المثلث المتساوي الساقين عموديا على القاعدة ينصف كلا من القاعدة وزاوية الرأس



في الشكل المقابل
إذا كان $AE \perp BC$
فان (١) AE متوسط (E منتصف BC)
(٢) AE ينصف $\angle A$

تعريف محور التماثل للمثلث المتساوي الساقين

محور التماثل للمثلث المتساوي الساقين هو المستقيم المرسوم من رأسه عموديا على القاعدة



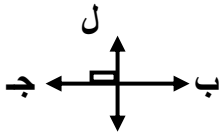
في الشكل المقابل إذا كان $AE \perp BC$
فان AE يسمى محور تماثل للمثلث ABC

ملاحظة

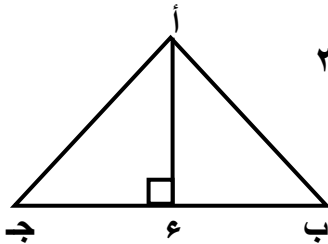
- (١) عدد محاور التماثل للمثلث المتساوي الساقين = محور واحد
- (٢) عدد محاور التماثل للمثلث المتساوي الاضلاع = ثلاث محاور
- (٣) عدد محاور التماثل للمثلث المختلف الاضلاع = ليس له محاور

تعريف محور القطعة المستقيمة

محور القطعة المستقيمة هو المستقيم العمودي عليها



إذا كان المستقيم $L \perp$ AB من منتصفها فإن L يسمى محور AB



في الشكل المقابل

مثال

$$AB = AC, \angle BAC = 25^\circ$$

$$AD \perp BC, \angle B = 65^\circ$$

أوجد

(١) طول AD (٢) $\angle C$ (٣) $\angle B$

الحل

$$AB = AC, AD \perp BC$$

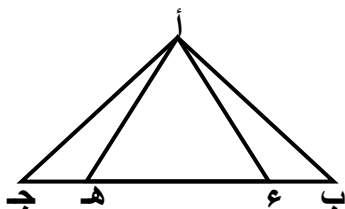
$$AD \text{ متوسط } \angle B = \angle C = 65^\circ$$

$$\angle B = \angle C = 65^\circ$$

$$\angle BAC = 25^\circ$$

$$\text{مجموع قياسات زوايا } \triangle ABC = 180^\circ$$

$$\angle C = 180^\circ - [25^\circ + 65^\circ] = 90^\circ$$



في الشكل المقابل

مثال

$$أ ب = أ ج$$

$$ب ع = ه ج$$

إثبت أن $\triangle أ ع ه$ متساوي الساقين

الحل

$$\triangle أ ب ع \equiv \triangle أ ج ه$$

ومن التطابق ينتج أن

$$أ ع = أ ه$$

$\triangle أ ع ه$ متساوي الساقين

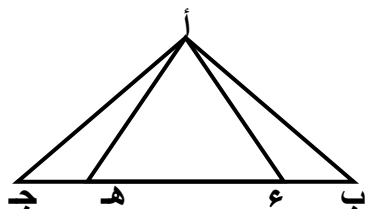
$$\triangle أ ب ع ، أ ه ج$$

$$ب ع = ع ج$$

$$أ ب = أ ج$$

$$ق(ب) = ق(ج)$$

فيهما



في الشكل المقابل

مثال

$$ب ع = ه ج$$

$$ق(أ ع ه) = ق(أ ه ع)$$

إثبت أن $\triangle أ ب ج$ متساوي الساقين

الحل

$$ق(أ ع ه) = ق(أ ه ع)$$

$$أ ع = أ ه$$

$$ق(أ ب ج) = ق(أ ه ج)$$

[مكملات الزوايا المتساوية تكون متساوية]

$$\triangle أ ب ج ، أ ه ج$$

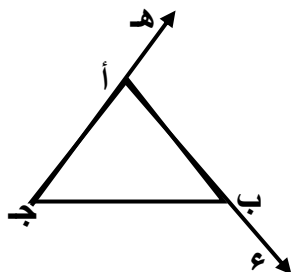
$$ب ع = ه ج$$

$$أ ع = أ ه$$

$$ق(أ ب ج) = ق(أ ه ج)$$

$$\triangle أ ب ج \equiv \triangle أ ه ج$$

أ ب = أ ج Δ أ ب ج متساوي الساقين



مثال

في الشكل المقابل

ق (هـ أ ب) = ق (ع ب ج)
إثبت أن Δ أ ب ج متساوي الساقين

الحل

$$ق (هـ أ ب) + ق (ب أ ج) = ١٨٠$$

$$ق (ع ب ج) + ق (أ ب ج) = ١٨٠$$

$$ق (هـ أ ب) + ق (ب أ ج) = ق (ع ب ج) + ق (أ ب ج)$$

$$ق (ب أ ج) = ق (أ ب ج)$$

Δ أ ب ج متساوي الساقين

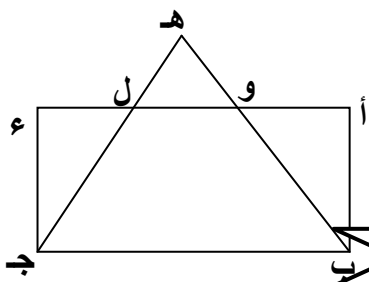
مثال

في الشكل المقابل

أ ب ج ع مستطيل ، ب و ج ل

إثبت أن

Δ هـ و ل متساوي الساقين



الحل

من ١ ، ٢ ، ٣ ينتج أن
ق (هـ و ل) = ق (هـ ل و)
هـ و = هـ ل

Δ أ ب و ، ل ج ع

$$أ ب = ع ج$$

$$ب و = ج ل$$

$$ق (أ) = ق (ع) = ٩٠^\circ$$

فيهما }

$$أ ب و \equiv ع ج و$$

$$ق (أ و ب) = ق (ج ل ع) \quad (١)$$

$$ق (أ و ب) = ق (هـ و ل) \quad (٢)$$

$$ق (ج ل ع) = ق (هـ ل و) \quad (٣)$$

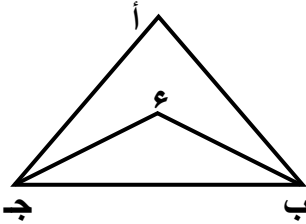
التباين في المثلثات



مسلمات التباين

بفرض ان س ، ص ، ع اعداد فان

- (١) إذا كان س < ص فان س + ع < ص + ع
- (٢) إذا كان س < ص فان س - ع < ص - ع
- (٣) إذا كان س < ص ، ع (عدد موجب) فان س ع < ص ع
- (٤) إذا كان س < ص ، ع (عدد سالب) فان س ع > ص ع
- (٥) إذا كان س < ص ، ص < ع فان س < ع
- (٦) إذا كان س < ص ، أ < ب فان س + أ < ص + ب



في الشكل المقابل

ق (أ ب ع) < ق (أ ج ع)

ب = ع ج

إثبت أن ق (ب ج) < ق (ج ع)

مثال

الحل

ق (أ ب ع) < ق (أ ج ع) (١)

ب = ع ج

ق (ب ج) = ق (ب ج ع) (٢)

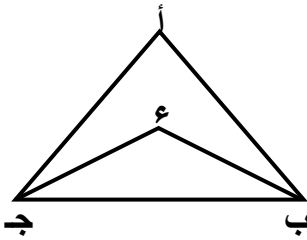
بجمع ١ ، ٢

ق (أ ب ع) + ق (ب ج) < ق (أ ج ع) + ق (ب ج ع)
ق (ب ج) < ق (ج ع)

مثال

في الشكل المقابل

ق (أ ب ع) < ق (أ ج ع)
ق (ع ب ج) < ق (ع ج ب)
إثبت أن ق (ب) < ق (ج)



الحل

ق (أ ب ع) < ق (أ ج ع) (١)
ق (ع ب ج) = ق (ع ج ب) (٢)
بجمع ١، ٢

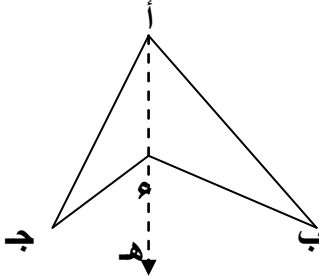
ق (أ ب ع) + ق (ع ب ج) < ق (أ ج ع) + ق (ع ج ب)
∴ ق (ب) < ق (ج)

مثال

في الشكل المقابل

إثبت أن

ق (ب ع ج) < ق (أ)



الحل

لعمل نرسم أ ع

ق (ب ع هـ) < ق (ب أ ع) [لأنها خارجة عن Δ أ ب ع] (١)
ق (ج ع هـ) < ق (ع أ ج) [لأنها خارجة عن أ ع ج] (٢)
بجمع ١، ٢ نجد أن

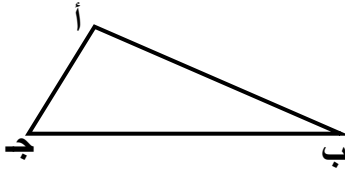
ق (ب ع هـ) + ق (ج ع هـ) < ق (ب أ ع) + ق (ع أ ج)
ق (ب ع ج) < ق (أ)

وهو المطلوب إثباته

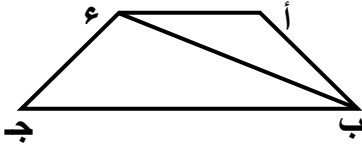
المقارنة بين زوايا مثلث

نظريّة

إذا اختلف طولا ضلعين من مثلث فأكبرهما فى الطول يقابله زاوية أكبر فى القياس من الزاوية المقابلة للضلع الآخر .



ففى الشكل المقابل
إذا كان $أب < أج$
فإن $ق(ج) < ق(ب)$



مثال
فى الشكل المقابل
 $أب < أع$ ، $بج < عج$
إثبت أن $ق(أعج) < ق(أبج)$

الحل

فى $\triangle أبع$

$أب < أع$

فى $\triangle بـجـع$

$بج < عج$

بجمع ١ ، ٢

$ق(أعج) + ق(بـجـع) < ق(أعج) + ق(بـجـع)$
 $\therefore ق(أعج) < ق(أبج)$

مثال

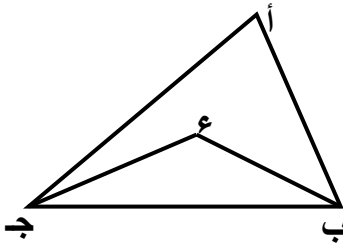
في الشكل المقابل

$\angle A < \angle B$

$\angle C = \angle E$

إثبت أن

$\angle A < \angle C$ (أو $\angle E$)



الحل

في $\triangle ABC$

$\angle A < \angle B$

في $\triangle CDE$

$\angle C = \angle E$

بطرح ٢ من ١

(١) $\angle A < \angle B$: $\angle A < \angle C$ (أو $\angle E$)

(٢) $\angle C = \angle E$: $\angle C = \angle E$

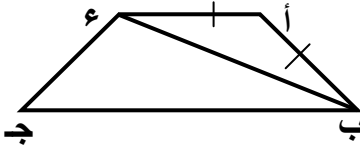
$\angle A < \angle B$: $\angle A < \angle C$ (أو $\angle E$)
 $\angle C = \angle E$: $\angle C = \angle E$
 $\angle A < \angle C$ (أو $\angle E$)

مثال

في الشكل المقابل

$\angle A = \angle E$ ، $\angle B < \angle C$

إثبت أن $\angle A < \angle C$ (أو $\angle E$)



الحل

في $\triangle ABC$

$\angle A = \angle E$

في $\triangle CDE$

$\angle B < \angle C$

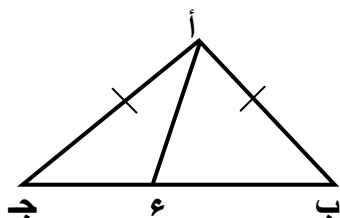
بجمع ١ ، ٢

(١) $\angle A = \angle E$: $\angle A = \angle E$

(٢) $\angle B < \angle C$: $\angle B < \angle C$

$\angle A = \angle E$: $\angle A = \angle E$
 $\angle B < \angle C$: $\angle B < \angle C$
 $\angle A < \angle C$ (أو $\angle E$)

∴ ق (أ ع ج) < ق (أ ب ج)



في الشكل المقابل

أ ب = أ ج ، ع د ب ج

برهن أن

ق (أ ع ب) < ق (ب)

مثال

الحل

في Δ أ ب ج

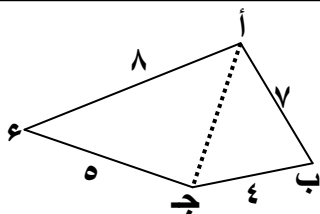
أ ب = أ ج

∴ ق (ب) = ق (ج)

ق (أ ع ب) < ق (ج) [خارجة عن Δ أ ع ج]

من ١ ، ٢ ينتج أن

∴ ق (أ ع ب) < ق (ب) [وهو المطلوب إثباته]



في الشكل المقابل

برهن أن

ق (ب ج ع) < ق (ب أ ع)

مثال

الحل

في Δ أ ب ج

أ ب < ب ج

∴ ق (أ ج ب) < ق (ب أ ج) (١)

في Δ أ ج ع

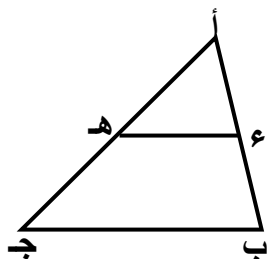
أ ع < ج ع

∴ ق (أ ج ع) < ق (ج أ ع) (٢)

بجمع ١ ، ٢ ينتج أن

ق (أ ج ب) + ق (أ ج ع) < ق (ب أ ج) + ق (ج أ ع)

∴ ق (ب ج ع) < ق (ب أ ع)



في الشكل المقابل

مثال

أ ج < أ ب

هـ منتصف أ ب ، أ ج

برهن أن

ق (أ هـ) < ق (أ هـ ع)

الحل

في Δ أ ب ج أ ج < أ ب $\therefore$ ق (ب) < ق (ج) (١)

هـ منتصف أ ب ، هـ منتصف أ ج

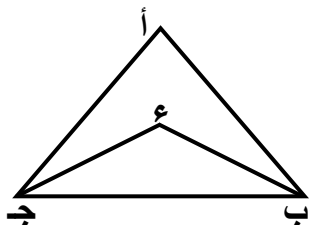
$\therefore$ هـ ع // ب ج

$\therefore$ ق (أ هـ) = ق (ب) (٢)

$\therefore$ ق (أ هـ ع) = ق (ج) (٣)

من ١ ، ٢ ، ٣ ينتج أن

$\therefore$ ق (أ هـ) < ق (أ هـ ع)



في الشكل المقابل

مثال

أ ب < أ ج

ب ع ينصف أ ب ج

ج ع ينصف أ ج ع

إثبت أن ع ب < ع ج

الحل

أ ب < أ ج $\therefore$ ق (ج) < ق (ب)

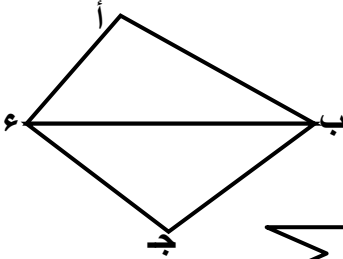
ب ع ينصف أ ب ج $\therefore$ ق (ب ع ج) = $\frac{1}{2}$ ق (ب)

ج ع ينصف أ ج ع $\therefore$ ق (ب ع ج) = $\frac{1}{2}$ ق (ج)

من ١ ، ٢ ، ٣ ينتج أن

ق (ب ع ج) < ق (ب ع ج)

∴ $\angle B < \angle E$ ج



في الشكل المقابل

$\angle B < \angle E$

مثال

$\angle B = \angle E$

إثبت أن $\angle C (\hat{A} \hat{E} \hat{C}) < \angle C (\hat{A} \hat{B} \hat{C})$

الحل

في $\triangle ABE$

$\angle B < \angle E$

∴ $\angle C (\hat{A} \hat{E} \hat{C}) < \angle C (\hat{A} \hat{B} \hat{C})$ (١)

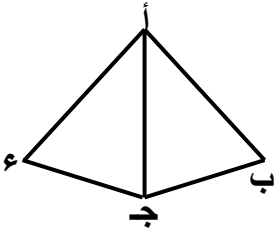
في $\triangle ABC$

$\angle B = \angle E$

∴ $\angle C (\hat{B} \hat{E} \hat{C}) = \angle C (\hat{B} \hat{A} \hat{C})$ (٢)

بجمع ١، ٢

$\angle C (\hat{A} \hat{E} \hat{C}) + \angle C (\hat{B} \hat{E} \hat{C}) < \angle C (\hat{A} \hat{B} \hat{C}) + \angle C (\hat{B} \hat{A} \hat{C})$
 ∴ $\angle C (\hat{A} \hat{E} \hat{C}) < \angle C (\hat{A} \hat{B} \hat{C})$



في الشكل المقابل

$\angle B < \angle E$ ، $\angle A < \angle C$ ج

مثال

برهن أن

$\angle C (\hat{B} \hat{A} \hat{E}) < \angle C (\hat{B} \hat{A} \hat{C})$

الحل

في $\triangle ABC$

$\angle B < \angle E$

∴ $\angle C (\hat{A} \hat{B} \hat{C}) < \angle C (\hat{B} \hat{A} \hat{C})$ (١)

في $\triangle ACE$

$\angle A < \angle C$

∴ $\angle C (\hat{A} \hat{C} \hat{E}) < \angle C (\hat{B} \hat{A} \hat{C})$ (٢)

بجمع ١، ٢ ينتج أن

$\angle C (\hat{A} \hat{B} \hat{C}) + \angle C (\hat{A} \hat{C} \hat{E}) < \angle C (\hat{B} \hat{A} \hat{C}) + \angle C (\hat{B} \hat{A} \hat{C})$

∴ ق (ب ج ع) < ق (ب أ ع)

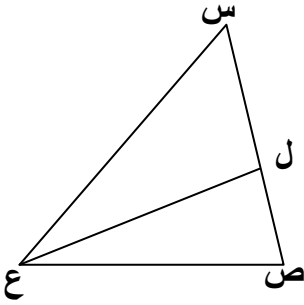
تمارين

(١) فى الشكل المقابل

س ع < س ص

إثبت أن

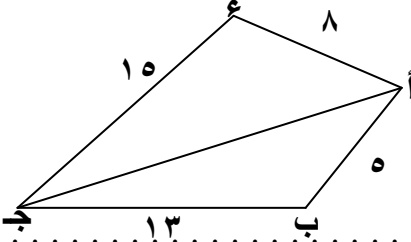
ق (س ل ع) < ق (س ع ص)



(٢) فى الشكل المقابل

إثبت أن

ق (ب أ ع) < ق (ب ج ع)

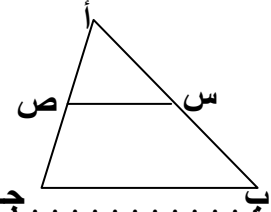


(٣) فى الشكل المقابل

أ ب < أ ج س منتصف أ ب

ص منتصف أ ج إثبت أن

ق (أ ص س) < ق (أ س ص)

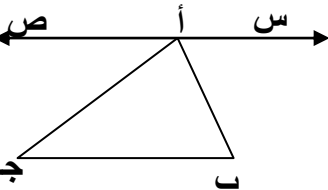


(٤) فى الشكل المقابل

أ ج < أ ب ، س ص // ب ج

إثبت أن

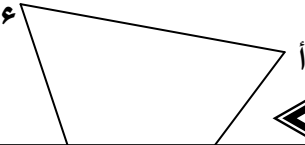
ق (س أ ب) < ق (ص أ ج)



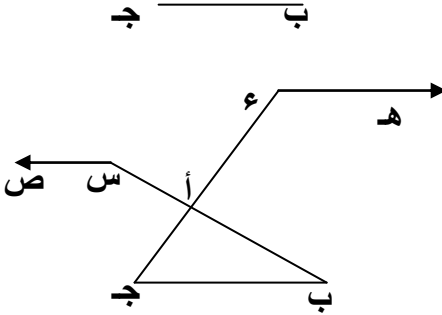
(٥) فى الشكل المقابل

أ ب ج ع شكل رباعى

أ ب = ب ج ، أ ع < أ ج



برهن أن ق(ج) < ق(أ)



(٦) في الشكل المقابل

أ ب < أ ج

هـ // ب ج // س س

إثبت أن

ق(هـ أ ج) < ق(ب س ص)

(٧) في الشكل المقابل

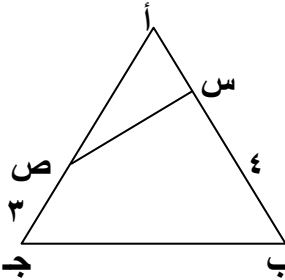
أ ب = أ ج ، ب س = س م

ج ص = س م

إثبت أن

(١) ق(أ س ص) < ق(أ س ص)

(٢) ق(ب س ص) < ق(س ص ج)

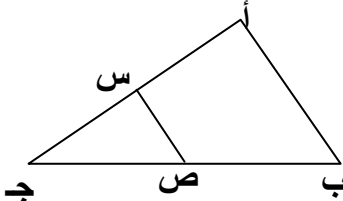


(٨) في الشكل المقابل

أ ج < أ ب ، أ ب // س ص

ق(أ) = ٩٠°

إثبت أن ق(س ص ج) < ٩٠°

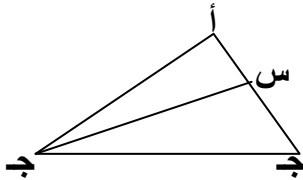


(٩) في الشكل المقابل

أ ب < أ ج

إثبت أن

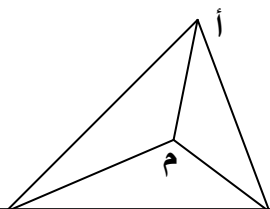
ق(أ س ب) < ق(أ ب ج)



(١٠) في الشكل المقابل

م ج < م ب < م أ

إثبت أن



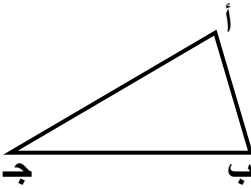
ق (أ) < ق (أ ج م) + ق (أ ب م)

ب ج

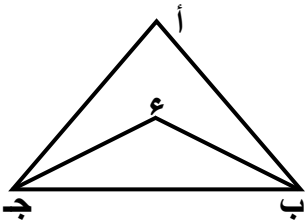
المقارنة بين أضلاع مثلث

نظريّة

إذا اختلف قياسا زاويتين من مثلث فأكبرهما فى القياس يقابلهما ضلع أكبر منه الضلع المقابل للزاوية الأخرى



ففى الشكل المقابل
إذا كان ق (ب) < ق (ج)
فان أ ج < أ ب



فى الشكل المقابل

مثال

أ ب < أ ج
ب ع ينصف أ ب ج
ج ع ينصف أ ج ع
ب ع < ج ع

إثبت أن

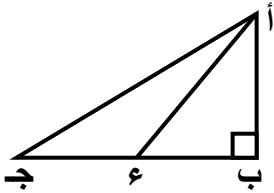
الحل

أ ب < أ ج : ق (ج) < ق (ب)
ب ع ينصف أ ب ج : ق (ب ع ج) = $\frac{1}{2}$ ق (ب ج)
ج ع ينصف أ ج ع : ق (ج ع ب) = $\frac{1}{2}$ ق (ج ب)

من ١ ، ٢ ، ٣ ينتج أن

ق (ب ع ج) < ق (ج ع ب)

$\therefore \angle \epsilon < \angle \zeta$



مثال
في الشكل المقابل
أ ب ج قائم الزاوية في ب

$\angle \epsilon > \angle \zeta$

إثبت أن $\angle \alpha < \angle \epsilon$

الحل

في $\triangle \text{أ ب ج}$

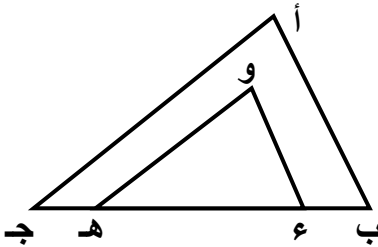
$\therefore \angle \epsilon < \angle \zeta$ (١)

ق (أ ب ج) $\angle \epsilon < \angle \zeta$ (٢) [لأنها خارجة عن $\triangle \text{أ ب ج}$]
من ١، ٢ ينتج أن

ق (أ ب ج) $\angle \epsilon < \angle \zeta$ (٣)

هـ . ط . ث

$\therefore \angle \alpha < \angle \epsilon$



في الشكل المقابل

أ ب // ع و ، أ ج // هـ و

إذا كان $\angle \alpha < \angle \epsilon$

برهن أن $\angle \alpha < \angle \epsilon$

الحل

في $\triangle \text{أ ب ج}$

$\angle \alpha < \angle \epsilon$

$\therefore \angle \epsilon < \angle \zeta$ (١)

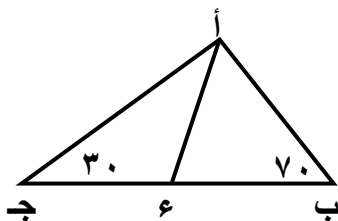
أ ب // ع و $\therefore \angle \epsilon = \angle \zeta$ (٢)

أ ج // هـ و $\therefore \angle \alpha = \angle \epsilon$ (٣)

من ١، ٢، ٣ ينتج أن

ق (أ ب ج) $\angle \epsilon < \angle \zeta$

$\therefore \angle \alpha < \angle \epsilon$



مثال

في الشكل المقابل

أع ينصف (ب أ ج)

ق (ب) = 70° ، ق (ج) = 30°

إثبت أن أ ع < ب ع

الحل

مجموع زوايا المثلث الداخلة = 180°

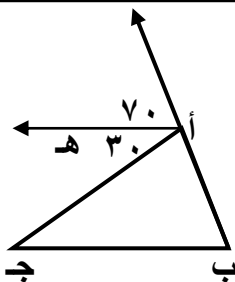
∴ ق (ب أ ج) = 180° - [30° + 70°] = 80°

أع ينصف ب أ ج

∴ ق (ب أ ع) = ق (ع أ ج) = 40°

في Δ أ ب ع

ق (ب) < ق (ب أ ع) ∴ أ ع < ب ع



مثال

في الشكل المقابل

إذا كان أ هـ // ب ج

إثبت أن أ ج < أ ب

الحل

أ هـ // ب ج

∴ ق (ب) = ق (ع أ هـ) = 70° [بالتناظر]

، ق (ج) = ق (هـ أ ج) = 30° [بالتبادل]

في Δ أ ب ج

ق (ب) < ق (ج)

∴ أ ج < أ ب

مثال

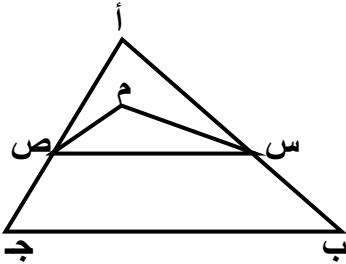
في الشكل المقابل

أ ب < أ ج ، س ص // ب ج

س م ينصف (أ س ص)

ص م ينصف (أ ص س)

برهن أن م س < م ص



الحل

في Δ أ ب ج

أ ب < أ ج $\therefore$ ق (ج) < ق (ب) (١)

س ص // ب ج $\therefore$ ق (أ س ص) = ق (ب) (٢)

، ق (أ ص س) = ق (ج) (٣)

من ١ ، ٢ ، ٣ ينتج أن ق (أ ص س) < ق (أ س ص) (٤)

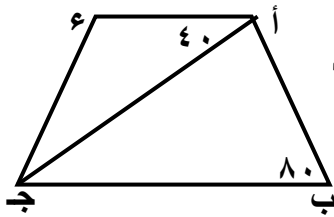
س م ينصف أ س ص $\therefore$ ق (م س ص) = $\frac{1}{2}$ ق (أ س ص) (٥)

ص م ينصف أ ص س $\therefore$ ق (م ص س) = $\frac{1}{2}$ ق (أ ص س) (٦)

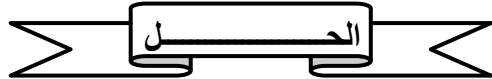
من ٤ ، ٥ ، ٦ ينتج أن

ق (أ ص س) < ق (أ س ص)

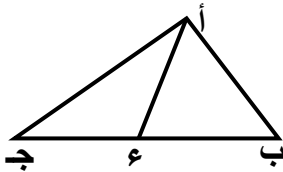
$\therefore$ س م < م ص



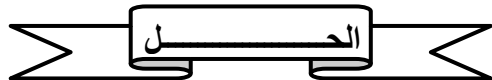
مثال
في الشكل المقابل
أع // ب ج ، ق (ب أ ج) = ٨٠
ق (ع أ ج) = ٤٠
إثبت أن ب ج < أ ج



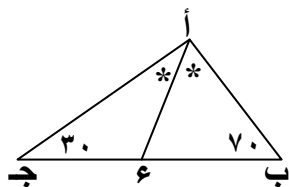
أع // ب ج
في $\triangle أ ب ج$
مجموع زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠
∴ ق (ب أ ج) = ١٨٠ - [٤٠ + ٨٠] = ٦٠
∴ ق (أ ب ج) < ق (ب أ ج)
∴ أ ج < ب ج



مثال
في الشكل المقابل
إذا كان أ ج < أ ب
إثبت أن أ ج < أ ع



أ ج < أ ب
∴ ق (ب أ ج) < ق (أ ب ج) (١)
ق (أ ع ج) < ق (ب أ ج) [لأنها خارجة عن $\triangle أ ب ع$ من ١، ٢ ينتج أن
ق (أ ع ج) < ق (أ ب ج)
∴ أ ج < أ ع وهو المطلوب إثباته

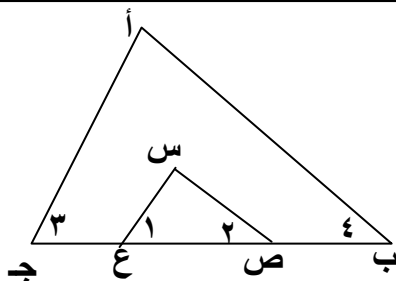


في الشكل المقابل
أء ينصف ب أ ج
إثبت أن أء < ب ع

مثال

الحل

مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = 180
 $\therefore$ ق(ب أ ج) = $[30 + 70] - 180 = 80^\circ$
 أء ينصف ب أ ج
 $\therefore$ ق(ب أ ع) = ق(ع أ ج) = 40



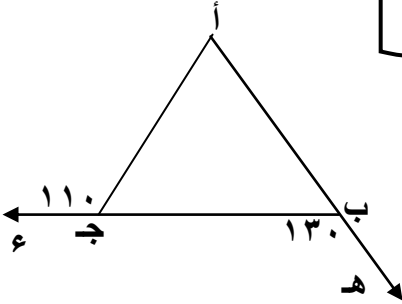
في الشكل المقابل
س ص < س ع
أ ب // س ص
أ ج < س ع
إثبت أن أ ب < أ ج

مثال

الحل

في س ص ع فيه س ص < س ع $\therefore$ ق(1) < ق(2).... (1)
 أ ب // س ص ، ب ج قاطع لهما $\therefore$ ق(2) = ق(4) [بالتناظر]. (2)
 أ ج // س ع ، ب ج قاطع لهما $\therefore$ ق(1) = ق(3) [بالتناظر]. (3)
 من 1 ، 2 ، 3 ينتج أن
 ق(3) < ق(4)
 $\therefore$ أ ب < أ ج وهو المطلوب إثباته

تمارين

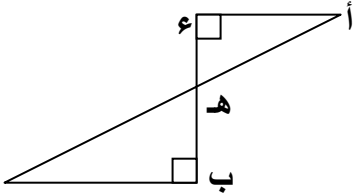


(١) في الشكل المقابل

ق (هـ ب ج) = ١١٠

ق (أ ج ع) = ١٣٠

رتب أضلاع المثلث تصاعديا
تبعاً لطوالها

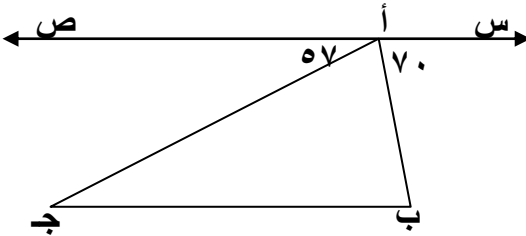


(٢) في الشكل المقابل

ق (أ ع ب) = ق (ع ب ج) = ٩٠

إثبت أن

أ ج < ب ع



(٣) في الشكل المقابل

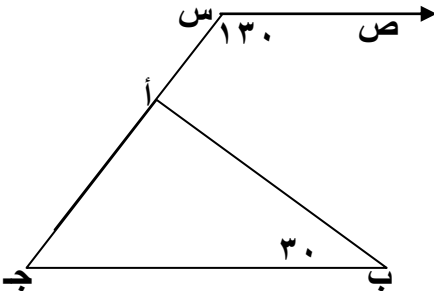
س ص // ب ج

ق (ب أ س) = ٧٠

ق (ج أ ص) = ٧٥

إثبت أن

أ ج < أ ب



(٤) في الشكل المقابل

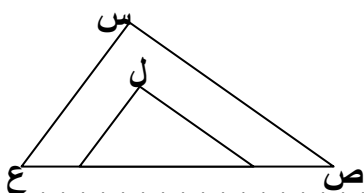
س ص // ب ج

ق (ص س ج) = ١٣٠

ق (أ ب ج) = ٣٠

إثبت أن

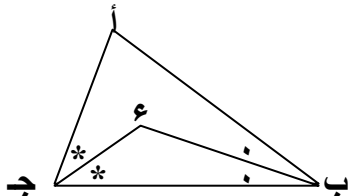
ج ب < أ ب



(٥) فى الشكل المقابل

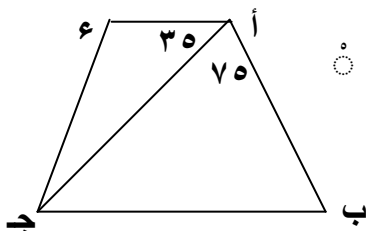
س ص < س ع ، ل م // س ص
ل ن // س ع إثبت أن
ل م < ل ن

(٦) أ ب ج د شكل رباعى فيه أ ع = ج د ، ق (ع) = ٥٠° ،
ق (أ) = ١١٠° ، ق (ب) = ٨٠° إثبت أن أ ب < ب ج



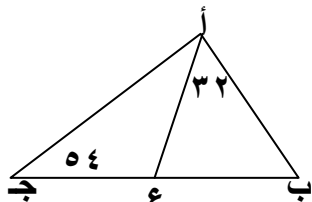
(٧) فى الشكل المقابل

أ ب < أ ج ، ج د ينصف أ ب
ب د ينصف أ ب ج
إثبت أن ب د < ج د



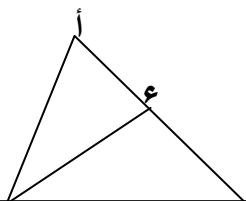
(٨) فى الشكل المقابل

أ ع // ب د ، ق (ع أ ج) = ٣٥°
ق (ب أ ج) = ٧٥°
إثبت أن
أ ج < أ ب



(٩) فى الشكل المقابل

أ ع = ج د ، ق (ب أ ع) = ٣٢°
ق (ج) = ٥٤° إثبت أن
ج د < ب د

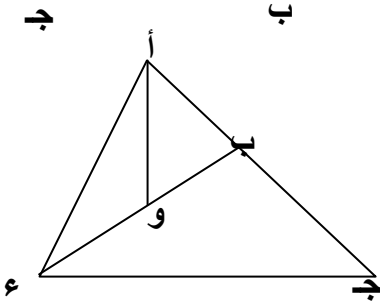


(١٠) فى الشكل المقابل

ج د ينصف ب ج د أ ، ق (ب) = ٤٠°
ق (أ) = ٦٠° إثبت أن



ب ع < ع أ



(١١) فى الشكل المقابل

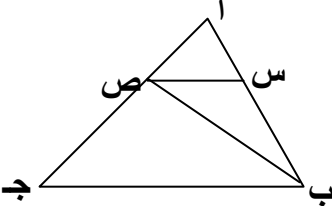
أو ب = و = ع و

ق (و أ ع) = ٣٠ °

برهن أن

(١) أ ع < أ ب

(٢) ع ج < أ ج

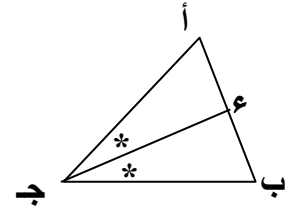


(١٢) فى الشكل المقابل

س ص // ب ج

س ص ينصف أ ب

برهن أن أ ج < أ ب

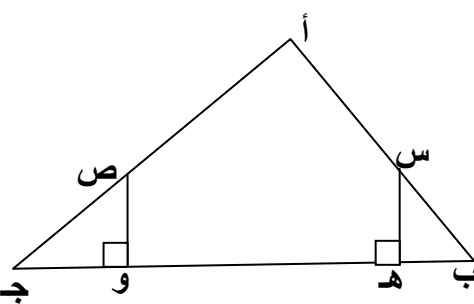


(١٣) فى الشكل المقابل

أ ب ج مثلث

ج ع ينصف أ ج ب

برهن أن ب ج < ب ع



(٤) فى الشكل المقابل

ق (ب أ ج) = ٩٠ ° ،

أ ب < أ ج

س هـ ⊥ ب ج

ص و ⊥ ب ج

ب هـ = و ج

إثبت أن و ص < هـ س

متباينة المثلث

مجموع طولى أى ضلعين من مثلث أكبر من طول الضلع الآخر
أو

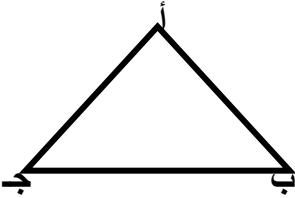
طول أى ضلع فى مثلث أصغر من مجموع طولى الضلعين الآخرين
وأكبر من الفرق بينهما

أى أن فى أى $\triangle$ أ ب ج

$أ ب + أ ج < ب ج$

$أ ب + ب ج < أ ج$

$أ ج + ب ج < أ ب$



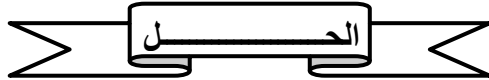
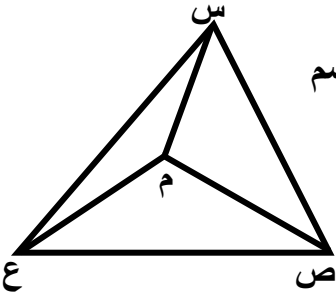
فى الشكل المقابل

إذا كان محيط س ص ع = ٥٠ سم

إثبت أن

$س م + ص م + ع م < ٢٥$

مثال



$س م + ص م + ع م < س ص$

س م ص فيه

$ص م + ع م + س م < ص ع$

ص م ع فيه

$س م + ع م + س م < س ع$ بالجمع

س م ع فيه

$س م + ص م + ع م + س م + ص م + ع م < س ص + ص ع + ع س$

$٢ س م + ٢ ص م + ٢ ع م < ٥٠$

$س م + ص م + ع م < ٢٥$

مثال

بين أيًا من الأطوال الآتية تصلح أن تكون أضلاع مثلث

(٢) ٥ ، ٧ ، ٣

(١) ٣ ، ٥ ، ٢

(٤) ٦ ، ٩ ، ٤

(٣) ٢ ، ٣ ، ٧

الحل

(١) الأطوال ٢ ، ٥ ، ٣ لا تصلح أن تكون أضلاع مثلث لأن

مجموع ٢ + ٣ = ٥ وليس أكبر من ٥

(٢) الأطوال ٣ ، ٧ ، ٥ تصلح أن تكون أضلاع مثلث لأن مجموع أي

ضلعين أكبر من طول الضلع الثالث

(٣) الأطوال ٧ ، ٣ ، ٢ لا تصلح أن تكون أضلاع مثلث لأن

٢ + ٣ = ٥ وهو أصغر من الضلع الثالث وليس أكبر

(٤) الأطوال ٤ ، ٩ ، ٦ تصلح لأن تكون أضلاع مثلث لأن مجموع

أي ضلعين أكبر من طول الضلع الثالث

مثال

أختر الإجابة الصحيحة مما بين القوسين

الحل

(١) الأطوال ٢ ، ٦ ، ٤ [تصلح - لا تصلح] لأن تكون أضلاع مثلث

(٢) الأطوال ٢ ، ٥ ، ٤ [تصلح - لا تصلح] لأن تكون أضلاع مثلث

(٣) الأطوال ٣ ، ٦ ، ٢ [تصلح - لا تصلح] لأن تكون أضلاع مثلث

(٤) الأطوال ٢ ، ٦ ، ٥ [تصلح - لا تصلح] لأن تكون أضلاع مثلث

(٥) الأطوال ٢ ، ٧ ، ٤ [تصلح - لا تصلح] لأن تكون أضلاع مثلث

(٦) الأطوال ٢ ، ٦ ، ٨ [تصلح - لا تصلح] لأن تكون أضلاع مثلث

(٧) الأطوال ٥ ، ٦ ، ٤ [تصلح - لا تصلح] لأن تكون أضلاع مثلث

(٨) الأطوال ٢ ، ٢ ، ٤ [تصلح – لا تصلح] لأن تكون أضلاع مثلث

أختر الاجابة الصحيحة مما بين القوسين

مثال

١- مجموع طولى أى ضلعين من مثلث طول الضلع الثالث

[أصغر من – أكبر من – يساوى – نصف]

٢- طول أى ضلع فى مثلث مجموع الضلعين الاخرين

[$>$ أو $<$ أو $=$ أو ضعف]

٣- أى من الاضلاع الاتية لا تصلح لأن تكون أضلاع مثلث

[٥ ، ٧ ، ٩ أو ٩ ، ٩ ، ٩ أو ٣ ، ٦ ، ١٢ أو ٣ ، ٤ ، ٥]

٤- إذا كان طولاً ضلعين ٧ ، ٤ فإن طول الضلع الثالث يمكن أن يكون

[١ سم ، ٢ سم ، ٣ سم ، ٤ سم]

٥- إذا كان طولاً ضلعين فى مثلث متساوى الساقين ٣ سم ، ٧ سم فإن

طول الضلع الثالث يساوى

[٧ سم أو ٣ سم ، ٤ سم ، ١٠ سم]

٦- مثلث له محور تماثل واحد ، طولاً ضلعين فيه ٤ سم ، ٨ سم

فإن محيطه =

[١٦ سم أو ٢٠ سم ، ٢٤ سم أو ٣٠ سم]